E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.A.M. - I.C.P.I. - I.S.E.N. - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1986

Série T

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Jeudi 29 Mai 1986 de 9h à 12h

A rédiger sur copies de couleur JAUNE

Les exercices sont indépendants ; il sera tenu compte de la clarté de la rédaction et du soin de la présentation.

Exercice n°1

On considère la fonction numérique f, d'une variable réelle définie par :

$f(x) = \dfrac{1}{x\,Ln^2 x}$, Ln désignant la fonction logarithme népérien.
et $Ln^2 x = [Ln\,x]^2$

1°) Déterminer le domaine de définition, les variations et les limites éventuelles de la fonction f.
Tracer sa représentation graphique.

2°) Soit a un réel positif ou nul ; étudier en fonction de a l' existence de l'intégrale $I(a) = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$. Calculer cette intégrale lorsqu'elle existe.

3°) Montrer que la série numérique de terme général f (k), $k \geq 2$, est convergente, et que son reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ vérifie les inégalités :

$$\forall n \geq 2 \qquad \frac{1}{Ln(n+1)} \leq R_n \leq \frac{1}{Ln\,n}.$$

4°) On se propose de déterminer une valeur approchée $\bar{S}$ de la somme $S = \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$ à ε près (c'est-à-dire : $|S - \bar{S}| < \varepsilon$).
Dans un premier temps on choisit pour $\bar{S}$ une somme partielle S_n.

a. Déterminer en fonction de ε la valeur minimale de n assurant l'inégalité $|S - \bar{S}| < \varepsilon$.

b. Une calculatrice détermine les sommes partielles successives à l'aide de la boucle ci-dessous exécutée en 10^{-6} seconde :

" $S_n = S_n + \dfrac{1}{(n+1)\,Ln^2(n+1)}$; $n = n + 1$ ".

Déterminer l'ordre de grandeur, en puissance de 10, du temps nécessaire pour obtenir une valeur approchée de S à 10^{-2} près.
(On donne les approximations : $10 \simeq e^{2,3}$ et 1 année $\simeq 3,15 \cdot 10^7$ secondes).

5°) Poursuivant le même but qu'à la question précédente on choisit cette fois :

$$\bar{S} = S_n + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{Ln\,(n+1)} + \frac{1}{Ln\,n}\right].$$

a. Montrer les inégalités :

$$|S - \bar{S}| < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{Ln\,n} - \frac{1}{Ln\,(n+1)}\right] < \frac{1}{2}\,\frac{1}{n\,Ln^2\,n}.$$

b. Déterminer une valeur de n telle que : $|S - \bar{S}| < 10^{-2}$.
Quel sera approximativement le temps mis par la calculatrice ?

T.S.V.P.

Exercice n°2

Soit l'application ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\phi(u,v) = (x,y) \ , \ x = u^2 - v^2 \ , \ y = 2uv.$$

1°) ϕ est-elle différentiable ? Quelle est sa matrice jacobienne ? En quels points le déterminant jacobien est-il nul ?

2°) Déterminer en fonction de x, y et du signe y, les antécédants par ϕ d'un couple quelconque (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

3°) En déduire que la restriction $\hat{\phi}$ de ϕ à l'ensemble Δ tel que :

$$\Delta = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ v > 0 \text{ ou } (v \geqslant 0 \text{ et } u \geqslant 0) \right\}$$

est une bijection de Δ sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $\hat{\phi}^{-1}$ est différentiable.

4°) Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et soit $F = f \circ \hat{\phi}$.

Exprimer $\frac{\partial^2 F}{\partial u \, \partial v}$ à l'aide de u, v et des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} .$$

5°) Quelles sont les solutions de classe C^2 de l'équation :

$$2x \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + y \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial f}{\partial y} - 1 = 0 \ ?$$

Exercice n°3

Soit dans l'espace affine euclidien usuel rapporté à un repère $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ orthonormé, un point M_t mobile dont les coordonnées vérifient le système :

$$\mathcal{d} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + y + 4z \\ \frac{dy}{dt} = -x - 7y - 4z \\ \frac{dz}{dt} = -6x + 6y \end{cases} .$$

1°) Soit A la matrice associée au système $\mathcal{d}$. A est-elle diagonalisable ?
Déterminer une base dans laquelle la matrice du système devient :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

2°) Déterminer les solutions du système associé à A'.
Montrer qu'en général les courbes décrites par le point M_t sont des paraboles.

3°) Donner, dans le repère $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, les équations de la parabole obtenue pour les conditions initiales :

$x(0) = y(0) = 0 \ , \ z(0) = 1.$
